Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 10 gennaio 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x+5}{x-4}\right)$$

determinandone insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, punti di massimo o di minimo locale, massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), intervalli di monotonia e di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Affinché la funzione sia definita, l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo. Imponendo la condizione, otteniamo che il dominio è $\{x < -5/2\} \cup \{x > 4\}$. D'ora in poi, lavoreremo solo su questo insieme. Notiamo subito che f è derivabile, e quindi continua, su tutto il suo dominio in quanto composizione di funzioni derivabili.

Studiamo i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{2x+5}{x-4}\right) = \log 2 + \lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{x+5/2}{x-4}\right) = \log 2,$$

visto che $\frac{x+5/2}{x-4} = \frac{x(1+5/(2x))}{x(1-4/x)} \to 1$ per $x \to \pm\infty$. In particulare, f ha $y = \log 2$ come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Abbiamo poi

$$\lim_{x\to -5/2} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$$

visto che, rispettivamente, $2x+5 \to 0^-$ e $x-4 \to -5/2-2$ nel primo caso, e $x-4 \to 0^+$ e $2x+5 \to 13$ nel secondo caso. In particolare, $x = -5/2$ e $x = 4$ sono asintoti verticali, e f è illimitata sia superiormente che inferiormente e non ammette né massimo né minimo globale.

Calcoliamo la derivata prima. Abbiamo

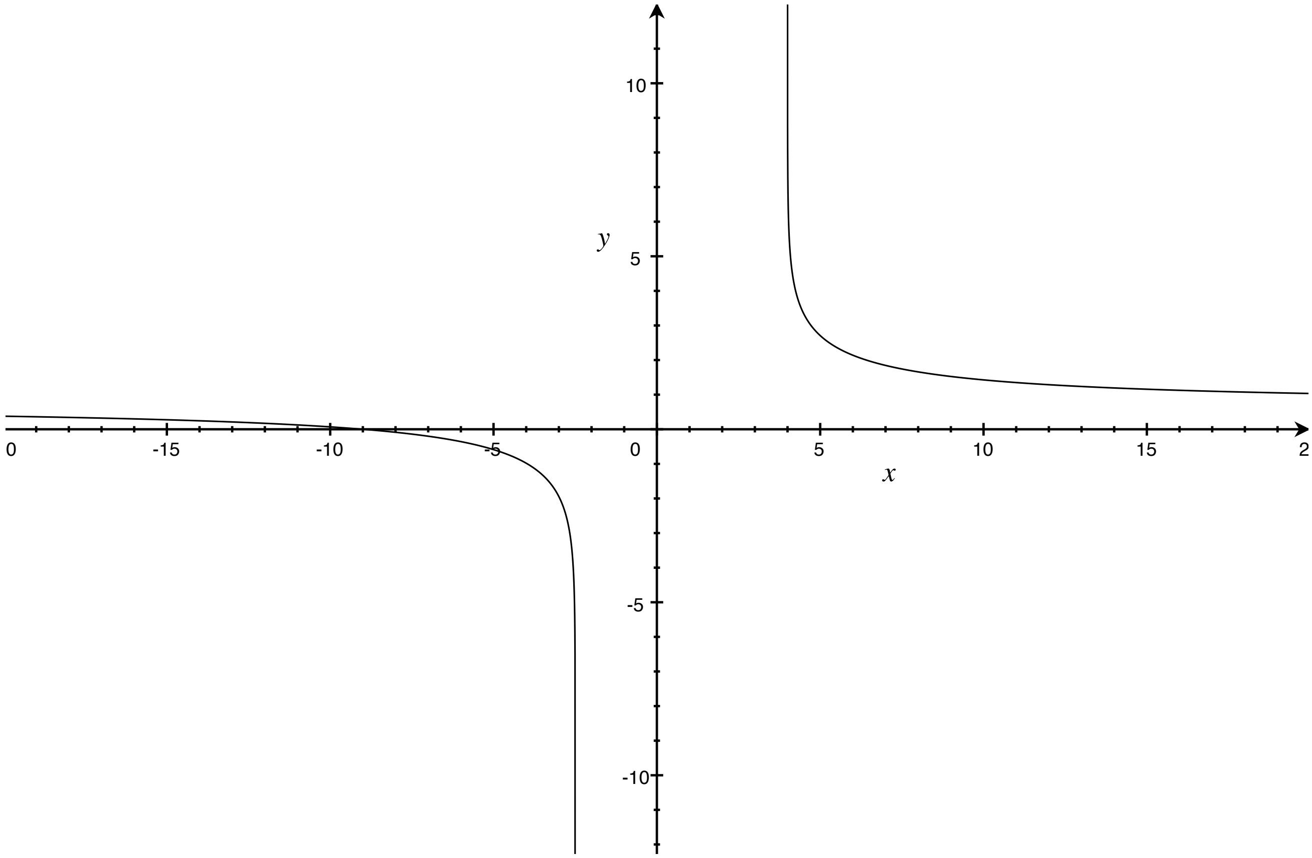
$$f'(x) = \frac{x-4}{2x+5}\,\frac{-(2x+5)+2(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{-13}{(2x+5)(x-4)}.$$

Visto che il segno del denominatore è sempre positivo per x nel dominio di f, abbiamo che f' è sempre negativa. f è quindi strettamente decrescente sia su $\{x < -5/2\}$ che su $\{x > 4\}$ e non ci sono punti di massimo o minimo locale.

Calcoliamo la derivata seconda. Abbiamo

$$f''(x) = \frac{13(4x-3)}{[(2x+5)(x-4)]^2}$$

Visto che il denominatore è sempre positivo, il segno è dato dal numeratore. Osserviamo che l'espressione si annulla per $x = 3/4$, che è fuori dal dominio. Abbiamo quindi $f''(x) > 0$ per $x > 4$, dove quindi f è convessa, e $f''(x) < 0$ per $x < -5/2$, dove f è concava.



Esercizio 2 Discutere la convergenza ed eventualmente calcolare il valore dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\log(x)\,\log^2(\log x)}.$$

Soluzione

Esercizio 3 Determinare se la successione

$$a_n = \sin(n)\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

è limitata inferiormente e/o superiormente.

Soluzione